Module 14

Afgeleiden voor functies van meerdere veranderlijken

Voor functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dus functies van één veranderlijke, konden we de "mate van verandering in een bepaald punt a" beschrijven met één getal, met name $f'(a)$, dat aangeeft hoe steil de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$ is (zie Module 13). Voor functies van twee veranderlijken is de grafiek een oppervlak en meteen is duidelijk dat het niet meer evident is hoe je moet beschrijven hoe "steil" de grafiek in een bepaald punt is. In elk geval is het duidelijk dat we niet meer met één getal zullen toekomen om te beschrijven hoe "steil" het is in elk punt van een oppervlak.

In deze module gaan we (onder meer) leren hoe we de "mate van afhankelijkheid" precies kunnen kwantificeren in het geval er meerdere onafhankelijke veranderlijken zijn. Een eerste voor de hand liggende manier om dit te doen, wordt gegeven door de zogenaamde partiële afgeleiden. Die partiële afgeleiden geven informatie over de mate van verandering in twee richtingen: horizontaal (volgens de x-as) en verticaal (volgens de y-as). Met behulp van de richtingsafgeleide kunnen we de mate van verandering in een willekeurige richting bepalen. De gradiënt van een functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is de vector met alle partiële afgeleiden en die geeft aan in welke richting f het sterkst toeneemt. De gradiënt is de correcte en meest zinvolle veralgemening van de afgeleide (voor functies van één veranderlijke) naar functies van meerdere veranderlijken.

1. Partiële afgeleiden

1.1. Definitie en voorbeelden

1.1.1 De idee achter partiële afgeleiden

Beschouw een functie

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

We willen nagaan in welke mate $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ verandert als $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ verandert. De eenvoudigste manier om dat te doen is nagaan wat er met $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gebeurt als slechts één van de veranderlijken x_i verandert terwijl de anderen constant blijven. Dat idee leidt onmiddellijk tot de notie van partiële afgeleiden.

Om één en ander te concretiseren beschouwen we bijvoorbeeld volgende functie

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto 3x_1^2 x_2 - x_2^3.$$

Wat is de "mate van verandering" van f in het punt $(2, -1)$? Laten we eerst de tweede veranderlijke, x_2, vastpinnen op de waarde -1 en kijken wat er gebeurt als enkel x_1 verandert. We beschouwen dus volgende functie

$$f(\,\cdot\,, -1) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x_1 \mapsto (f(\,\cdot\,, -1))\,(x_1) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_1, -1) = -3x_1^2 + 1.$$

Dat is een functie van één veranderlijke. We weten dus uit Module 13 dat we "de mate van verandering" van $f(\,\cdot\,, -1)$ kunnen beschrijven met de afgeleide, dus met

$$(f(\,\cdot\,, -1))' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x_1 \mapsto (f(\,\cdot\,, -1))'\,(x_1) = -6x_1.$$

In het bijzonder is $(f(\,\cdot\,, -1))'\,(2) = -12$. We noemen $(f(\,\cdot\,, -1))'\,(2)$ de **partiële afgeleide** van f **naar haar eerste veranderlijke** in het punt $(2, -1)$ en we noteren

$$(f(\,\cdot\,, -1))'\,(2) = D_1 f(2, -1).$$

Analoog kunnen we kwantificeren hoe sterk $f(x_1, x_2)$ verandert als we de eerste veranderlijke, x_1, vastpinnen op de waarde 2 en enkel x_2 laten variëren. We beschouwen daartoe de functie

$$f(2, \cdot\,) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x_2 \mapsto (f(2, \cdot\,))\,(x_2) \stackrel{\text{def}}{=} f(2, x_2) = 12x_2 - x_2^3.$$

De afgeleide van deze functie van één veranderlijke is

$$(f(2, \cdot\,))' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x_2 \mapsto (f(2, \cdot\,))'\,(x_2) = 12 - 3x_2^2.$$

In het bijzonder is $(f(2, \cdot\,))'\,(-1) = 9$. We noemen $(f(2, \cdot\,))'\,(-1)$ de **partiële afgeleide** van f **naar haar tweede veranderlijke** in het punt $(2, -1)$ en we noteren

$$(f(2, \cdot\,))'\,(-1) = D_2 f(2, -1).$$

Dat brengt ons tot de definitie van partiële afgeleiden.

1.1.2 Definitie

Beschouw een functie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gedefinieerd op een open deel $A \subseteq \mathbb{R}^n$ en zij $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$. Voor $j = 1, 2, \ldots, n$ stellen we

$$A_j = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid (a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n) \in A \right\}.$$

Men kan aantonen dat A_j een open deel van $\mathbb{R}$ is. We noemen f ***partieel afleidbaar*** *in a* ***naar haar j-de veranderlijke*** *als de functie*

$$f_j : A_j \to \mathbb{R} : t \mapsto f_j(t) = f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$

afleidbaar is in a_j. We noemen dan $f_j'(a_j)$ de ***partiële afgeleide*** *van f in a* ***naar de j-de veranderlijke*** *en we noteren dat getal dan met $(D_j f)(a)$ of $D_j f(a)$.*
We noemen f ***partieel afleidbaar*** *in een punt a als f partieel afleidbaar is in a naar elk van haar veranderlijken.*
We noemen f partieel afleidbaar in de verzameling A als f partieel afleidbaar is in elke $a \in A$. We kunnen in dit geval de partiële afgeleide functies van f definiëren door

$$D_j f : A \to \mathbb{R} : a \mapsto (D_j f)(a), \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Opmerking: (1) Andere notaties voor $D_j f(a)$ resp. $D_j f$ zijn

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \text{ resp. } \frac{\partial f}{\partial x_j} of f_{x_j}'(a) \text{ resp. } f_{x_j}'.$$

Merk op dat de notaties f' of Df geen betekenis hebben in de context van functies van meerdere veranderlijken; de notatie moet immers altijd aangeven naar welke veranderlijke afgeleid wordt.
(2) We kunnen de definitie van $(D_j f)(a)$ ook herformuleren als

$$(D_j f)(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)}{h}.$$

1.1.3 Voorbeelden

Het berekenen van partiële afgeleiden gebeurt met dezelfde technieken als het berekenen van "gewone" afgeleiden van functies van één veranderlijke. Volgens de definitie moet immers enkel de veranderlijke waarnaar we afleiden als variabel

worden beschouwd, de andere veranderlijken kunnen dan als constant beschouwd worden. Volgende voorbeelden illustreren dit.

(1) Beschouw de functie uit 1.1.1, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto 3x_1^2 x_2 - x_2^3$. Dan is in elk punt $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$D_1 f(x_1, x_2) = 6x_1 x_2 \quad \text{en} \quad D_2 f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 3x_2^2.$$

(2) Beschouw $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto ax + by + c$ waarbij $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dan is in elk punt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$D_1 f(x, y) = a \quad \text{en} \quad D_2 f(x, y) = b.$$

Controleer, na het lezen van 1.2 hieronder, dat de meetkundige betekenis van de partiële afgeleiden hier (uiteraard) in overeenstemming is (of zou moeten zijn) met het inzicht dat je verworven hebt bij het maken van oefening 19 uit Module 3 (pagina 67) in de meetkundige betekenis van a en b voor de grafiek van f.

(3) Beschouw $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sin xy$. Dan is

$$D_1 f(x, y) = y \cos xy \quad \text{en} \quad D_2 f(x, y) = x \cos xy.$$

(4) Beschouw $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x\, e^{-(x^2+y^2)}$. Dan is

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= e^{-(x^2+y^2)} - 2x^2\, e^{-(x^2+y^2)}, \\ D_2 f(x, y) &= -2xy\, e^{-(x^2+y^2)}. \end{aligned}$$

(5) Beschouw $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto x\, e^{-yz} + 3x^2 y - xyz^4 + 7$. Dan is

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y, z) &= e^{-yz} + 6xy - yz^4, \\ D_2 f(x, y, z) &= -xz\, e^{-yz} + 3x^2 - xz^4, \\ D_3 f(x, y, z) &= -xy\, e^{-yz} - 4xyz^3. \end{aligned}$$

Oefen zelf! Schud een aantal concrete functies van twee en meer veranderlijken uit je mouw en bereken de partiële afgeleiden.

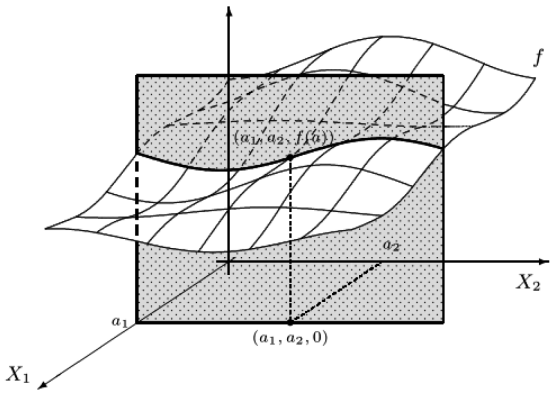
1.2. Betekenis

Nu we al wat in de vingers hebben *hoe* we partiële afgeleiden berekenen, is het hoog tijd dat we ons buigen over *wat* we precies berekenen. M.a.w. wat is de betekenis van de partiële afgeleiden? Welke informatie geven ze over de functie?

Voor functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ hebben we in 1.2 van Module 13 gezien dat de afleidbaarheid en de afgeleide een precieze meetkundige betekenis hebben. Afleidbaarheid kwam meetkundig neer op het bestaan van een niet-verticale raaklijn; de afgeleide gaf dan de richtingscoëfficiënt (= helling) van die raaklijn.

Vermits de partiële afgeleiden van een functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eigenlijk "gewone" afgeleiden zijn van functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ (namelijk de n functies die uit f ontstaan door alle veranderlijken behalve één vast te houden) moet er dus ook een *meetkundige betekenis* zijn voor de partiële afleidbaarheid en de partiële afgeleiden in termen van het bestaan van niet-verticale raaklijnen en de hellingen van die raaklijnen. Om dit te visualiseren aan de hand van een grafiek beperken we de bespreking hiervan tot functies van 2 veranderlijken. Maar de inzichten die we voor $n = 2$ verkrijgen, kunnen overgedragen worden naar de situatie met willekeurige n.

Beschouw een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$ en een $a = (a_1, a_2)$. We gebruiken de notaties $f(a_1, \cdot\,)$ en $f(\,\cdot\,, a_2)$ zoals ingevoerd in 1.1.1. De kromme die de grafiek van de functie $f(a_1, \cdot)$ beschrijft, verkrijgen we door het oppervlak gegeven door de grafiek van f te snijden met het vlak met vergelijking $x_1 = a_1$ (dus het vlak door $(a_1, a_2, 0)$ dat loodrecht staat op de X_1-as).



We weten nu dat f partieel afleidbaar is in a naar haar tweede veranderlijke, per definitie, als en slechts als de functie $f(a_1, \cdot\,)$ afleidbaar is in a_2, dus als en slechts als er een niet-verticale raaklijn bestaat aan de grafiek van $f(a_1, \cdot\,)$ in a_2. Als zo'n niet-verticale raaklijn bestaat, is bovendien de richtingscoëfficiënt ervan gelijk aan de afgeleide van $f(a_1, \cdot)$ in a_2, dus gelijk aan $D_2 f(a)$.

Op de tekening hierboven vinden we de grafiek van $f(a_1, \cdot\,)$ terug als snijlijn van de grafiek van f en het verticale vlak door $(a_1, a_2, 0)$ dat loodrecht op de X_1-as staat. Zeggen dat f partieel afleidbaar is in a naar haar tweede veranderlijke komt dus meetkundig neer op het bestaan van een niet-verticale raaklijn aan die snijlijn, m.a.w. op het bestaan van een niet-verticale raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a_1, a_2, f(a))$ in de richting van X_2. Vul de tekening aan door die raaklijn te tekenen. De richtingscoëfficiënt van die raaklijn geeft dan meteen de waarde van $D_2 f(a)$.

Volledig analoog zien we in dat f partieel afleidbaar is in a naar haar eerste veranderlijke als en slechts als de grafiek van f in het punt $(a_1, a_2, f(a))$ een niet-

verticale raaklijn heeft in de richting van X_1. De richtingscoëfficiënt van die raaklijn is dan gelijk aan $D_1 f(a)$.

Zeggen dat f partieel afleidbaar is in a naar haar beide veranderlijken komt dus meetkundig neer op het bestaan van 2 onderling loodrechte niet-verticale raaklijnen aan de grafiek van f in het punt $(a_1, a_2, f(a))$; de ene raakt in de richting van x_1, de andere raakt in de richting van x_2. Die beide raaklijnen vormen samen een (niet-verticaal) "**raakkruis**". De stand (of "helling") van dat raakkruis wordt bepaald door de waarde van $D_1 f(a)$ én $D_2 f(a)$.

Opmerking: Om de intuïtie nog meer te stimuleren kunnen we dit nog tastbaarder maken door bijvoorbeeld voor f een functie te nemen die de hoogte van het aardoppervlak boven de zeespiegel in functie van de plaats voorstelt. De grafiek van f stelt dan het landschap voor. Neem aan dat de X_1-as in de noord-zuid richting wijst en de X_2-as in de oost-west richting. Met het punt $a = (a_1, a_2)$ komt het punt $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ op het landschap overeen. De partiële afgeleide $D_2 f(a)$ geeft dan de helling die we ondervinden als we op het landschap in de oost-west richting op het punt $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ toelopen, terwijl $D_1 f(a)$ de helling geeft in de noord-zuid richting.

We weten nu dat partiële afgeleiden altijd een meetkundige betekenis hebben. Als we te maken hebben met functies die in een bepaalde context één of andere afhankelijkheid modelleren, dan krijgen de partiële afgeleiden, bovenop hun meetkundige betekenis, vaak ook nog een context-specifieke betekenis. We illustreren dat met een voorbeeld.

1.2.1 Voorbeeld

Beschouw de productiefunctie die de output van een bedrijf als functie van de ingezette middelen (kapitaal K en arbeid L) modelleert:

$$Q : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : (K, L) \mapsto Q(K, L).$$

De partiële afgeleiden van Q hebben een duidelijke economische betekenis. Zo geeft $D_1 Q(K, L)$ (in toepassingen ook vaak genoteerd met $\frac{\partial Q}{\partial K}(K, L)$) aan hoe gevoelig de output Q is voor een wijziging van het ingezette kapitaal K (terwijl de hoeveelheid ingezette arbeid onveranderd blijft). $D_1 Q(K, L)$ is het aantal eenheden waarmee de productie-output wijzigt (per eenheid van kapitaal) als men de inzet van kapitaal een klein beetje varieert (en de inzet van arbeid constant blijft). Daarom noemt men $D_1 Q(K, L)$ de **marginale productiviteit van kapitaal**. Analoog noemt men $D_2 Q(K, L)$ oftewel $\frac{\partial Q}{\partial L}(K, L)$ de **marginale productiviteit van arbeid**. Wat verwacht je op basis van je economische intuïtie over de tekens van de marginale productiviteiten van kapitaal en arbeid?

Bij wijze van voorbeeld berekenen we marginale productiviteiten van volgende Cobb-Douglasproductiefunctie:

$$Q : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : (K, L) \mapsto Q(K, L) = aK^{1/4}L^{3/4} \text{ met } a \in \mathbb{R}_0^+.$$

Hier zijn

$$D_1Q(K, L) = \frac{\partial Q}{\partial K}(K, L) = \frac{a}{4}K^{-3/4}L^{3/4}$$

$$\text{en } D_2Q(K, L) = \frac{\partial Q}{\partial L}(K, L) = \frac{3a}{4}K^{1/4}L^{-1/4}.$$

2. Eersteordebenadering

2.1. Op verkenning

Uit 1.2 van Module 13 weten we dat we een afleidbare functie van één veranderlijke in de omgeving van een bepaald punt zeer goed kunnen benaderen door een eerstegraadsfunctie. Meer expliciet, zij $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie gedefinieerd op een open deel $A \subseteq \mathbb{R}$ en zij $a \in A$. Veronderstel dat f afleidbaar is in a. Beschouw dan de eerstegraadsfunctie

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Dan is g in de omgeving van a een zeer goede benadering voor f in de zin dat

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - g(x)|}{|x - a|} = 0.$$

Informeel schrijven we dit als $f(x) \approx g(x)$ als $x \approx a$ (het teken "$\approx$" staat voor "is ongeveer gelijk aan"). Meetkundig komt dit neer op het feit dat de grafiek van g de raaklijn is aan de grafiek van f in het punt $\big(a, f(a)\big)$.

Hoe zit dat nu bij functies van meerdere veranderlijken? Kunnen we die ook onder bepaalde voorwaarden in de omgeving van een punt benaderen door een eerstegraadsfunctie? Laat ons even kijken naar een functie van twee veranderlijken. We beschouwen dus een functie $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (gedefinieerd op een open deel $A \subseteq \mathbb{R}^2$) en een $a = (a_1, a_2) \in A$. We nemen aan dat f partieel afleidbaar is in a naar beide veranderlijken. Omdat een partiële afgeleide van een functie uiteindelijk een "gewone" afgeleide is van de functie die je verkrijgt door alle veranderlijken behalve één vast te houden, vinden we dat

$$f(x_1, a_2) \approx f(a_1, a_2) + D_1f(a_1, a_2)\,(x_1 - a_1) \text{ als } x_1 \approx a_1 \tag{14.1}$$

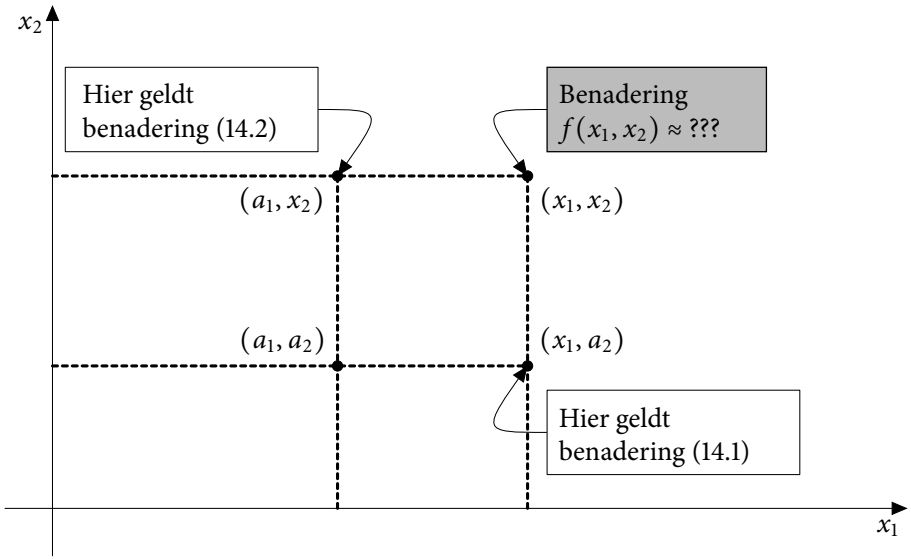
en

$$f(a_1, x_2) \approx f(a_1, a_2) + D_2 f(a_1, a_2)\,(x_2 - a_2) \quad \text{als } x_2 \approx a_2. \tag{14.2}$$

We weten dat we hierin het teken "≈" als volgt moeten begrijpen:

$$\lim_{x_1 \to a_1} \frac{\left| f(x_1, a_2) - f(a_1, a_2) - D_1 f(a_1, a_2)\,(x_1 - a_1) \right|}{|x_1 - a_1|} = 0$$

en analoog voor de tweede veranderlijke. We hebben dus een benadering voor $f(x_1, x_2)$ voor $x = (x_1, x_2)$ in de buurt van $a = (a_1, a_2)$ *op voorwaarde dat slechts één van de coördinaten van x een andere waarde aanneemt dan de corresponderende coördinaat van a.*



We vragen ons af of we ook een benadering hebben voor $f(x_1, x_2)$ voor $x = (x_1, x_2)$ in de buurt van $a = (a_1, a_2)$ *als we toelaten dat zowel $x_1 \neq a_1$ als $x_2 \neq a_2$*, m.a.w. is

$$f(x_1, x_2) \approx f(a_1, a_2) + D_1 f(a_1, a_2)\,(x_1 - a_1) + D_2 f(a_1, a_2)\,(x_2 - a_2)$$

als $x = (x_1, x_2) \approx a = (a_1, a_2)$? Of, nauwkeuriger gesteld, is

$$\lim_{x \to a} \frac{\left| f(x) - f(a) - D_1 f(a)\,(x_1 - a_1) - D_2 f(a)\,(x_2 - a_2) \right|}{\|x - a\|} = 0\,? \tag{14.3}$$

We testen dat even aan de hand van een paar voorbeelden.

2.1.1 Voorbeeld

Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2$ en het punt $a = (2,1)$. Merk op dat $D_1 f(2,1) = 4$ en $D_2 f(2,1) = 2$. Voor alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ geldt dus:

$$\begin{aligned}
&f(x_1, x_2) - f(2,1) - D_1 f(2,1)\,(x_1 - 2) - D_2 f(2,1)\,(x_2 - 1) \\
&= x_1^2 + x_2^2 - 5 - 4(x_1 - 2) - 2(x_2 - 1) \\
&= x_1^2 - 4x_1 + 4 + x_2^2 - 2x_2 + 1 \\
&= (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \\
&= \|(x_1, x_2) - (2,1)\|^2.
\end{aligned}$$

Daarom geldt voor alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ met $(x_1, x_2) \neq (2,1)$:

$$\frac{\left|f(x_1, x_2) - f(2,1) - D_1 f(2,1)\,(x_1 - 2) - D_2 f(2,1)\,(x_2 - 1))\right|}{\|(x_1, x_2) - (2,1)\|} = \|(x_1, x_2) - (2,1)\|.$$

Wanneer we van deze uitdrukking de limiet nemen voor $(x_1, x_2) \to (2,1)$ vinden we nul. We zien dus dat (14.3) opgaat in dit voorbeeld.

2.1.2 Voorbeeld

Beschouw de functie

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{als } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{als } (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

We nemen $a = (0,0)$. Merk op dat f partieel afleidbaar is in $(0,0)$. Inderdaad,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0,$$

dus is $D_1 f(0,0) = 0$ en analoog vinden we dat $D_2 f(0,0) = 0$. Merk nu op dat $f(t,t) = 1/2$ voor alle $t \neq 0$. Daarom is

$$f(t,t) - f(0,0) - D_1 f(0,0)t - D_2 f(0,0)t = f(t,t) - f(0,0) = \frac{1}{2}$$

voor alle $t \neq 0$. We zien hieraan dat (14.3) niet kan opgaan, meer nog, we zien zelfs dat f niet continu is in $(0,0)$!

Het loutere bestaan van de partiële afgeleiden van een functie in a is dus niet voldoende opdat (14.3) zou opgaan. Eigenlijk is dat niet zo verwonderlijk: de partiële afgeleiden geven immers enkel informatie over wat met de functiewaarde gebeurt als slechts één van de veranderlijken varieert; er wordt niets gezegd over wat

er gebeurt als alle variabelen samen variëren. Voorbeeld 2 illustreert zelfs dat *het bestaan van de partiële afgeleiden niet eens de continuïteit van f kan garanderen*.[1] De partiële afgeleiden geven dus, zoals hun naam het suggereert, enkel partiële informatie over het gedrag van een functie in de buurt van een punt.

Opdat (14.3) zou opgaan hebben we dus meer nodig dan het loutere bestaan van de partiële afgeleiden. Laten we proberen zelf te ontdekken wat dit is.
Beschouw een functie $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (gedefinieerd op een open deel $A \subseteq \mathbb{R}^2$) en een $a = (a_1, a_2) \in A$. Veronderstel dat f partieel afleidbaar is in de omgeving van a. Beschouw een $x = (x_1, x_2) \approx a = (a_1, a_2)$. Dan geldt wegens de eerste orde benadering voor functies van één veranderlijke

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) &= f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2) + f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2) \\ &\approx D_1 f(a_1, x_2)\,(x_1 - a_1) \;+\; D_2 f(a_1, a_2)\,(x_2 - a_2). \end{aligned} \tag{14.4}$$

Anderzijds zouden we willen dat

$$f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) \approx D_1 f(a_1, a_2)\,(x_1 - a_1) \;+\; D_2 f(a_1, a_2)\,(x_2 - a_2). \tag{14.5}$$

Wanneer we het resultaat in (14.4) vergelijken met wat we wensen (14.5), stellen we vast dat het voldoende is te eisen dat $D_1 f(a_1, x_2)\,(x_1 - a_1) \approx D_1 f(a_1, a_2)\,(x_1 - a_1)$ als $x_2 \approx a_2$, wat voldaan zal zijn als we eisen dat $D_1 f$ continu is.

Het argument hierboven is eigenlijk een schets van het bewijs (in het geval $n = 2$) van volgende stelling die zegt dat de continuïteit van de partiële afgeleiden in a volstaat opdat (14.3) zou gelden.[2]

[1] Vergelijk dit fenomeen met het resultaat uit de theorie van de functies van één veranderlijke dat zegt dat afleidbaarheid de continuïteit impliceert.

[2] Het bestaan van de partiële afgeleiden in de omgeving van a en de continuïteit ervan in a zelf, zijn *voldoende* voorwaarden opdat (14.3) zou opgaan. Ze zijn *niet nodig*, d.w.z. er zijn voorbeelden van functies die toch aan (14.3) voldoen maar waarbij de partiële afgeleiden niet continu zijn in a of zelfs enkel in a zelf bestaan. De minimale voorwaarde onder dewelke (14.3) opgaat wordt per definitie de totale afleidbaarheid van f in a genoemd.

2.1.3 Stelling

Beschouw een functie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (gedefinieerd op een open deel $A \subseteq \mathbb{R}^n$) en een $a \in A$. Veronderstel dat er een open deel $A_0 \subseteq A$ bestaat zo dat $a \in A_0$ en zo dat f partieel afleidbaar is in alle punten van A_0. Veronderstel bovendien dat de functies $D_i f : A_0 \to \mathbb{R}$ continu zijn in a voor alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.[3] Definieer de functie

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} D_i f(a)\,(x_i - a_i).$$

Dan zal

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - g(x)|}{\|x - a\|} = 0.$$

Als f aan de voorwaarden van deze stelling voldoet, dan noemen we de eerstegraadsfunctie g die in de stelling gedefinieerd wordt, de **eersteordebenadering** van f rond a.

2.1.4 Voorbeeld

Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 2xy + y^2$. Merk op dat

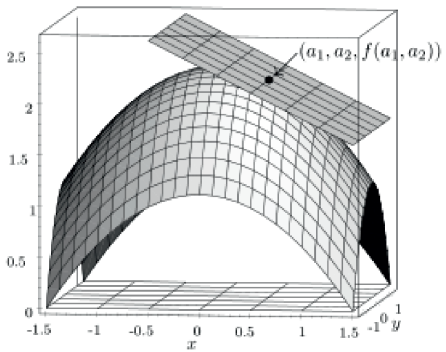
$$D_1 f(x, y) = 2y \quad \text{en} \quad D_2 f(x, y) = 2x + 2y.$$

We zien dadelijk in dat $D_1 f(x, y)$ en $D_2 f(x, y)$ overal continu zijn. Daarom heeft f in elk punt een eersteordebenadering. Bijgevolg is de eersteordebenadering van f in het punt $(1, 2)$:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= f(1, 2) + D_1 f(1, 2)(x - 1) + D_2 f(1, 2)(y - 2) \\ g(x, y) &= 8 + 4(x - 1) + 6(y - 2) \end{aligned}$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 4x + 6y - 8.$$

Zoals bij functies van één veranderlijke kunnen we de eersteordebenadering ook meetkundig interpreteren in termen van de grafieken van f en g. Om hier zicht op te krijgen, beperken we ons tot het geval van twee veranderlijken. Vermits g een eerstegraadsfunctie is, is de grafiek ervan dan een (niet-verticaal) vlak. Het feit dat $\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - g(x)|}{\|x - a\|} = 0$ komt meetkundig neer op het feit dat de grafiek van g het **raakvlak** is aan de grafiek van f in het punt $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$.



Stelling 2.1.3 geeft dus een voldoende voorwaarde op f opdat er een niet-verticaal raakvlak zou bestaan in het punt $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$. Meetkundig is nu ook duidelijk dat je met het bestaan van de partiële afgeleiden van f in a alleen niet toekomt om te mogen besluiten dat er een raakvlak is. Immers partiële afleidbaarheid naar de i-de veranderlijke in een punt a komt meetkundig neer op het bestaan van een niet-verticale raaklijn aan de grafiek van f volgens de richting van de i-de coördinaatas. Voor functies f met twee veranderlijken vertaalt partiële afleidbaarheid van f in een punt a naar beide veranderlijken zich dus meetkundig naar het bestaan van een niet-verticaal "raakkruis".[4] Het is mogelijk om je een oppervlak voor te stellen waarbij er in een bepaald punt wel een niet-verticaal raakkruis bestaat maar desalniettemin geen raakvlak.

2.2. De eersteordebenadering aan het werk

Beschouw een functie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die partieel afleidbaar is in een open omgeving van een punt $a \in A$ en waarvan de partiële afgeleiden continu zijn in a. Volgens Stelling 2.1.3 bestaat er dan een eersteordebenadering g van f in a, namelijk:

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} D_i f(a)\,(x_i - a_i).$$

We weten dus dat voor $x \approx a$: $f(x) \approx g(x)$. In de omgeving van a kan men dus f benaderen door de eerstegraadsfunctie g.

In toepassingen wordt deze benadering veel gebruikt. Men schrijft dan meestal

$$\Delta f(a) \;\approx\; \sum_{i=1}^{n} D_i f(a)\;\Delta x_i, \tag{14.6}$$

waarbij

$$\Delta x_i = x_i - a_i, \qquad \Delta f(a) = f(x) - f(a).$$

[4] Zie de bespreking in 1.2.

2.2.1 Toepassing 1: foutentheorie

Als illustratie van de eersteordebenadering in de vorm (14.6) bekijken we volgend probleem uit de foutentheorie. Veronderstel dat we het volume van een cilinder willen kennen. We zullen dan de straal r en de hoogte h van de cilinder meten. Via de formule $V = \pi r^2 h$ zullen we dan het volume V berekenen. Maar op de waarde van r en h zitten meetfouten bv. respectievelijk maximaal 0.5% en 0.3%. Wat zal de maximale procentuele fout zijn op het berekende volume?
De functie waar het in dit probleem over gaat is

$$V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (r, h) \mapsto V(r, h) = \pi r^2 h.$$

Merk op dat

$$D_1 V(r, h) = 2\pi r h \quad \text{en} \quad D_2 V(r, h) = \pi r^2.$$

We zien dadelijk in dat $D_1 V$ en $D_2 V$ overal continu zijn. Daarom heeft V in elk punt een eersteordebenadering. Bijgevolg is

$$\Delta V(r, h) \approx 2\pi r h \, \Delta r + \pi r^2 \, \Delta h.$$

Vermits we geïnteresseerd zijn in relatieve fouten, delen we links en rechts door $V(r, h)$. We vinden dan

$$\frac{\Delta V(r, h)}{V(r, h)} \approx 2 \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h}.$$

Een fout van 0.5% op r en 0.3% op h kan dus aanleiding geven tot een fout van $2 \cdot 0.5\% + 0.3\% = 1.3\%$ op V.

2.2.2 Toepassing 2

In de vorige toepassing gebruikten we de eersteordebenadering voor een functie waarvoor we over een expliciet functievoorschrift beschikten. Nu zijn er echter talrijke situaties waarbij we wel weten dat er één of andere afhankelijkheid is, maar waarvoor we geen expliciet functievoorschrift kennen. Soms hebben we wel informatie over de functiewaarden in enkele punten. Als die punten niet te ver uit elkaar liggen kunnen we via de eersteordebenadering een gefundeerde schatting maken voor de functiewaarden in andere naburige punten, althans als de betrokken functie "braaf" genoeg is om een eersteordebenadering toe te laten (dus als de functie continue partiële afgeleiden heeft). We illustreren dat met een voorbeeld.

De vraag naar waspoeder Wit hangt af van de prijs p_1 van dat product en de prijs p_2 van het concurrerend poeder Witter. Voor die afhankelijkheid is geen precies functievoorschrift gekend. Veronderstel dat er zich een marktevenwicht heeft ingesteld bij een bepaalde p_1^* en p_2^*; noteer de vraag naar Wit in dit evenwicht met V^*. In het recent verleden heeft men een aantal kleine fluctuaties rond

dit evenwicht kunnen observeren. Zo heeft men geleerd dat de vraag naar WIT met 5% van zijn evenwichtswaarde V^* daalt, als de prijs van WIT met 2% van de evenwichtsprijs p_1^* stijgt en simultaan de prijs van WITTER met 1% van zijn evenwichtsprijs p_2^* daalt. Anderzijds heeft men ook vastgesteld dat als WIT en WITTER gelijktijdig 2% van hun evenwichtsprijs goedkoper worden, de vraag naar WIT met 2% stijgt.

Op een bepaald moment is er een promotiecampagne voor WITTER waarbij de prijs van dit poeder met 4% van zijn evenwichtsprijs zakt. Met hoeveel procent moet de prijs van WIT (ongeveer) veranderen opdat de vraag naar WIT onveranderd zou blijven?

We beschrijven de afhankelijkheid van de vraag naar WIT van de prijzen p_1 en p_2 met een functie

$$V : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ :\to \mathbb{R} : (p_1, p_2) \mapsto V(p_1, p_2).$$

We weten dat $V(p_1^*, p_2^*) = V^*$ maar voor de rest hebben we geen expliciet functievoorschrift voor V. We nemen aan dat V continue partiële afgeleiden heeft in de omgeving van het punt (p_1^*, p_2^*). Bijgevolg heeft V een eersteordebenadering in de omgeving van (p_1^*, p_2^*). We weten dus dat

$$\Delta V(p_1^*, p_2^*) \approx D_1 V(p_1^*, p_2^*)\, \Delta p_1 + D_2 V(p_1^*, p_2^*)\, \Delta p_2,$$

waarbij Δp_1 en Δp_2 de wijzigingen zijn van de prijzen t.o.v. de evenwichtsprijzen p_1^* resp. p_2^* en $\Delta V(p_1^*, p_2^*)$ de overeenkomstige wijziging in de vraag naar WIT. Omdat de wijzigingen in de gegevens procentueel beschreven zijn, herschrijven we deze benadering als

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V(p_1^*, p_2^*)}{V^*} &\approx \frac{p_1^* D_1 V(p_1^*, p_2^*)}{V^*}\,\frac{\Delta p_1}{p_1^*} + \frac{p_2^* D_2 V(p_1^*, p_2^*)}{V^*}\,\frac{\Delta p_2}{p_2^*}\\ &= a_1\,\frac{\Delta p_1}{p_1^*} + a_2\,\frac{\Delta p_2}{p_2^*},\end{aligned}$$

waarbij $a_i = \frac{p_i^* D_i V(p_1^*, p_2^*)}{V^*}$ met $(i = 1, 2)$. Ook al kennen we geen expliciet functievoorschrift voor V, toch kunnen we uit de gegevens de waarde van a_1 en a_2 (benaderend) bepalen. Er is immers gegeven dat

$$\begin{cases} 0.02a_1 - 0.01a_2 \approx -0.05, \\ -0.02a_1 - 0.02a_2 \approx 0.02. \end{cases}$$

Wanneer we dit "benaderend" stelsel voor a_1 en a_2 oplossen als een gewoon stelsel (d.w.z. met $\approx$ vervangen door $=$), dan vinden we

$$a_1 \approx -2 \text{ en } a_2 \approx 1.$$

Bijgevolg is

$$\frac{\Delta V(p_1^*, p_2^*)}{V^*} \approx -2\frac{\Delta p_1}{p_1^*} + \frac{\Delta p_2}{p_2^*}.$$

Als $\frac{\Delta p_2}{p_2^*} = -0.04$ moet dus $\frac{\Delta p_1}{p_1^*} \approx -0.02$ opdat de vraag naar Wit niet zou veranderen.

3. Kettingregel

3.1. Probleemstelling en verkenning

Beschouw functies $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Dan kunnen we de samenstelling $h = g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vormen. Veronderstel dat de componentsfuncties van f partieel afleidbaar zijn in een punt $a \in \mathbb{R}^n$ en dat g partieel afleidbaar is in $f(a)$. Is h dan partieel afleidbaar in a? Zo ja, kunnen we de partiële afgeleiden van h in a dan uitdrukken in termen van de partiële afgeleiden van g in $f(a)$ en van de componentsfuncties van f in a?

Voor functies van één veranderlijke (dus het geval $n = m = 1$) weten we uit Propositie 2.1.3 van Module 13 dat het antwoord op beide vragen affirmatief is,[5] en we hebben dan de formule

$$(g \circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big)f'(a).$$

Aan de hand van dat gekende resultaat kunnen we meteen ook de situatie aan waarbij $m = 1$ en n willekeurig is. Beschouw functies $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dan is $g \circ f$ een functie van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}$. Vermits partieel afleiden naar de i-de variabele neerkomt op het "gewoon" afleiden van de functie van één variabele die men verkrijgt door alle overige constant te houden, kunnen we voor deze situatie terugvallen op de "gewone" kettingregel uit Propositie 2.1.3 van Module 13. We kunnen dus besluiten dat de functie

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x_i \mapsto g\big(f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)\big)$$

afleidbaar is in a_i en dat de afgeleide van die functie in a_i gelijk is aan

$$g'\big(f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)\big)\,\big(f(a_1, \ldots, a_{i-1}, \cdot, a_{i+1}, \ldots, a_n)\big)'(a_i).$$

Anders gezegd, de functie $g \circ f$ is partieel afleidbaar in a naar haar i-de veranderlijke en

$$D_i(g \circ f)(a) = g'\big(f(a)\big)\,D_i f(a).$$

[5] Als een functie maar één veranderlijke heeft, is de partiële afgeleide van de functie naar die ene veranderlijke natuurlijk de "gewone" afgeleide van de functie.

Indien bijvoorbeeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 - 3x \sin y$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een willekeurige afleidbare functie is, dan is de samenstelling

$$g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto g(x^2 - 3x \sin y)$$

overal partieel afleidbaar naar beide veranderlijken en bovendien is

$$\begin{aligned} D_1(g \circ f)(x, y) &= g'(x^2 - 3x \sin y)\,(2x - 3 \sin y), \\ D_2(g \circ f)(x, y) &= -g'(x^2 - 3x \sin y)\, 3x \cos y. \end{aligned}$$

Wanneer we onderzoeken of de kettingregel verder kan veralgemeend worden tot functies van meerdere veranderlijken, stellen we vast dat een nieuw fenomeen opduikt zodra $m > 1$. We verkennen dit eerst in de eenvoudigste situatie, namelijk het geval waarbij $m = 2$ en $n = 1$, m.a.w. we beschouwen functies

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto f(t) = \big(f_1(t), f_2(t)\big)$$

en

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto g(x, y).$$

De samenstelling $h = g \circ f$ is dan een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$,

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto h(t) = g\big(f_1(t), f_2(t)\big).$$

We veronderstellen nu dat f_1 en f_2 afleidbaar zijn in een $a \in \mathbb{R}$ en dat g partieel afleidbaar is in $f(a) = \big(f_1(a), f_2(a)\big)$. Zal h afleidbaar zijn in a?

Opdat h afleidbaar zou zijn in a, zou h op zijn minst continu moeten zijn in a. Maar een eenvoudig voorbeeld laat zien dat zelfs die continuïteit onder de gegeven condities al mis kan lopen.Beschouw bijvoorbeeld

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, t)$$

en

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{als } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{als } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Dan zijn de componentsfuncties f_1 en f_2 afleidbaar in 0. We weten ook dat g partieel afleidbaar is in $f(0) = (0, 0)$. Maar h is gegeven door

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto h(t) \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{als } t \neq 0, \\ 0 & \text{als } t = 0. \end{cases}$$

We vinden hier dat h niet continu is in $a = 0$ en dus zeker niet afleidbaar.

De reden is dat het loutere bestaan van de partiële afgeleiden van g in $f(a)$ niet genoeg informatie geeft over het gedrag van g in de buurt van $f(a)$. Als t in de

buurt van a ligt, zal $f(t) = \big(f_1(t), f_2(t)\big)$ wel in de buurt van $f(a) = \big(f_1(a), f_2(a)\big)$ liggen, maar in het algemeen (zoals bv. ook in het voorbeeld hierboven), zullen de coördinaten van $f(t)$ *beide* verschillen van die van $f(a)$. En de partiële afgeleiden van g geven enkel informatie over wat er met $g(x, y)$ gebeurt als *slechts één* van de coördinaten van (x, y) verschilt van de coördinaten van $\big(f_1(a), f_2(a)\big)$.

We zullen dus een sterkere voorwaarde op g moeten opleggen vooraleer we kunnen hopen te mogen besluiten dat $h = g \circ f$ afleidbaar zal zijn. Stelling 2.1.3 suggereert ons welke voorwaarden op g kans maken: we nemen aan dat g partieel afleidbaar is in de omgeving van $f(a)$ én dat de partiële afgeleiden $D_1 g$ en $D_2 g$ continu zijn in $f(a)$. Onder deze voorwaarden lukt het wel te bewijzen dat $h = g \circ f$ afleidbaar is in a. Ook al is het niet zo moeilijk, het exacte bewijs hiervan geven we hier niet. We schetsen hieronder het argument wat ons toch de essentie van het bewijs laat zien en wat ons bovendien een formule voor $h'(a)$ zal opleveren.

Neem $t \approx a$ (met $t \neq a$). Omdat f_1 en f_2 afleidbaar en dus a fortiori continu zijn in a zal $\big(f_1(t), f_2(t)\big) \approx \big(f_1(a), f_2(a)\big)$. Uit Stelling 2.1.3 volgt nu dat

$$\begin{aligned} h(t) - h(a) &= g\big(f_1(t), f_2(t)\big) - g\big(f_1(a), f_2(a)\big) \\ &\approx D_1 g\big(f(a)\big)\big(f_1(t) - f_1(a)\big) + D_2 g\big(f(a)\big)\big(f_2(t) - f_2(a)\big). \end{aligned}$$

De nauwkeurige betekenis van "≈" in bovenstaande vergelijking is als volgt: als men het verschil neemt tussen linker- en rechterlid en deelt door $t - a$, dan zal de limiet hiervan voor $t \to a$ nul zijn, m.a.w.

$$\lim_{t \to a} \left| \frac{h(t) - h(a)}{t - a} - D_1 g\big(f(a)\big) \frac{f_1(t) - f_1(a)}{t - a} - D_2 g\big(f(a)\big) \frac{f_2(t) - f_2(a)}{t - a} \right| = 0.$$

Omdat f_1 en f_2 afleidbaar zijn in a bestaat

$$\lim_{t \to a} \left(D_1 g\big(f(a)\big) \frac{f_1(t) - f_1(a)}{t - a} + D_2 g\big(f(a)\big) \frac{f_2(t) - f_2(a)}{t - a} \right)$$

en is die limiet gelijk aan $D_1 g\big(f(a)\big) f_1'(a) + D_2 g\big(f(a)\big) f_2'(a)$. Bijgevolg bestaat ook $\lim\limits_{t \to a} \dfrac{h(t) - h(a)}{t - a}$, m.a.w. h is afleidbaar, en

$$h'(a) = D_1 g\big(f(a)\big) f_1'(a) + D_2 g\big(f(a)\big) f_2'(a).$$

3.2. Kettingregel voor meerdere veranderlijken

In de argumentatie hierboven is de essentie vervat van het bewijs van een speciaal geval (het geval $m = 2$) van volgende stelling.

3.2.1 Stelling

Beschouw een functie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m : x \mapsto f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_m(x)\big)$ gedefinieerd op een open deel $A \subseteq \mathbb{R}$. Zij $a \in A$ en veronderstel dat alle componentsfuncties $f_1, \ldots, f_m$ afleidbaar zijn in a.
Beschouw een functie $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ gedefinieerd op een open deel $B \subseteq \mathbb{R}^m$ zo dat $f(A) \subseteq B$. Veronderstel dat er een open deel $B_0 \subseteq B$ bestaat zodat $f(a) \in B_0$ en de partiële afgeleiden van g bestaan in B_0. Veronderstel bovendien dat de functies $D_1 g, \ldots, D_m g$ continu zijn in $f(a)$. Dan is de functie $g \circ f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ afleidbaar in a en

$$(g \circ f)'(a) = \sum_{j=1}^{m} D_j g\big(f(a)\big) f_j'(a).$$

Ter illustratie bekijken we volgend voorbeeldje.

3.2.2 Voorbeeld

Beschouw een functie $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ waarvan we het functievoorschrift niet nader specifiëren. We nemen enkel aan dat g overal partieel afleidbaar is naar elk van haar drie veranderlijken en dat de functies $D_1 g$, $D_2 g$ en $D_3 g$ continu zijn. Beschouw vervolgens de functie

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto f(x) = (x^2, 3\sin x, e^{2x}).$$

De functie $h = g \circ f$ is dan gegeven door

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto h(x) = g(x^2, 3\sin x, e^{2x}).$$

Volgens Stelling 3.2.1 is h afleidbaar en bovendien is voor elke $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = D_1 g(x^2, 3\sin x, e^{2x})2x + D_2 g(x^2, 3\sin x, e^{2x})3\cos x + D_3 g(x^2, 3\sin x, e^{2x})2e^{2x}.$$

We illustreren Stelling 3.2.1 nu in een wat concretere context. Veronderstel dat de tijdsevolutie van de prijzen van drie concurrerende producten X, Y en Z beschreven wordt door een functie

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto p(t) = \big(p_1(t), p_2(t), p_3(t)\big),$$

waarbij $p_1(t)$ (resp. $p_2(t)$, resp. $p_3(t)$) de prijs is van product X (resp. Y, resp. Z) op het ogenblik t.

De vraag naar (bijvoorbeeld) product X hangt af van de prijzen van de drie producten. (Hoe hoger de prijs van product X, hoe minder de vraag naar dit product zal zijn, hoe hoger de prijzen van Y en Z, hoe aantrekkelijker product X zal worden.) De vraag naar product X beschrijven we met een functie

$$V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto V(x, y, z),$$

waarbij $V(x, y, z)$ de vraag is naar product X als de prijzen van producten X, Y, Z respectievelijk x, y en z bedragen. De tijdsevolutie van de vraag naar product X wordt dan gegeven door de functie $V \circ p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Veronderstel nu dat we geïnteresseerd zijn in hoe snel de vraag naar product X verandert in de tijd. Dan moeten we naar de afgeleide $(V \circ p)'$ kijken. Neem aan dat de functies p_1, p_2 en p_3 afleidbaar zijn en dat V continue partiële afgeleiden heeft. Dan is

$$(V \circ p)' = (D_1 V \circ p)\, p_1' + (D_2 V \circ p)\, p_2' + (D_3 V \circ p)\, p_3' \tag{14.7}$$

In toepassingen schrijft men dit meestal anders. Men noteert de veranderlijken van V met p_1, p_2 en p_3 en men schrijft (14.7) dan als

$$\begin{aligned} V'\big(p_1(t), p_2(t), p_3(t)\big) = {} & D_1 V\big(p_1(t), p_2(t), p_3(t)\big) \frac{dp_1}{dt}(t) \\ & + \frac{\partial V}{\partial p_2}\big(p_1(t), p_2(t), p_3(t)\big) \frac{dp_2}{dt}(t) \\ & + \frac{\partial V}{\partial p_3}\big(p_1(t), p_2(t), p_3(t)\big) \frac{dp_3}{dt}(t), \end{aligned}$$

of nog, zonder expliciete vermelding van de variabelen, als

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial p_2}\frac{dp_2}{dt} + \frac{\partial V}{\partial p_3}\frac{dp_3}{dt}.$$

Deze notatie is mnemotechnisch en rekentechnisch handig, maar conceptueel toch enigszins gevaarlijk omdat ze verwarring kan scheppen. Zo stelt p_1 in de notatie $\dfrac{\partial V}{\partial p_1}$ de eerste veranderlijke van V voor; in $\dfrac{dp_1}{dt}$ daarentegen is p_1 een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$. Ook maakt de laatste notatie zonder de variabelen geen onderscheid tussen de functies V en $V \circ p$.

Vermits partieel afleiden neerkomt op "gewoon" afleiden van een functie van één veranderlijke verkregen door alle veranderlijken behalve één als constanten te beschouwen kunnen we met behulp van Stelling 3.2.1 ook samenstellingen $g \circ f$ partieel afleiden in situaties waarbij f een functie is van meerdere variabelen. We illustreren dat met een voorbeeldje. Beschouw een functie $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ waarvan

we het functievoorschrift niet nader specifiëren. We nemen enkel aan dat g overal partieel afleidbaar is naar elk van haar vier veranderlijken en dat de functies $D_1 g$, $D_2 g$, $D_3 g$ en $D_4 g$ continu zijn. Definieer nu de functie[6]

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto h(x, y) = g(xy^2, y \cos x, x^3, e^{2y}).$$

Dan is h overal partieel afleidbaar en voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ is

$$\begin{aligned} D_1 h(x, y) = {} & D_1 g(xy^2, y \cos x, x^3, e^{2y})\, y^2 \\ & - D_2 g(xy^2, y \cos x, x^3, e^{2y})\, y \sin x \\ & + D_3 g(xy^2, y \cos x, x^3, e^{2y})\, 3x^2 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} D_2 h(x, y) = {} & D_1 g(xy^2, y \cos x, x^3, e^{2y})\, 2xy \\ & + D_2 g(xy^2, y \cos x, x^3, e^{2y}) \cos x \\ & + D_4 g(xy^2, y \cos x, x^3, e^{2y})\, 2e^{2y}. \end{aligned}$$

Het vergt niet veel creativiteit om zelf oefeningen van dit type te verzinnen en zo de kettingregel in te oefenen.

3.3. Toepassing op de kettingregel: homogene functies

3.3.1 Inleidend voorbeeld

De productiehoeveelheid Q van een bedrijf hangt af van een aantal productiefactoren, bijvoorbeeld van het ingezette kapitaal K en de ingezette arbeid L (beide gemeten in één of andere geschikte eenheid). We beschrijven die afhankelijkheid met een functie

$$Q : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : (K, L) \mapsto Q(K, L).$$

Als men een schaalvergroting in het bedrijf doorvoert door bijvoorbeeld zowel de inzet van kapitaal als van arbeid te verdubbelen, zal men in eerste instantie verwachten dat de productie ook zal verdubbelen. In termen van de productiefunctie Q betekent dit

$$Q(2K, 2L) = 2Q(K, L) \quad \text{voor alle } K, L > 0,$$

of algemener, wanneer we het bedrijf "herschalen" met een factor $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$:

$$Q(\lambda K, \lambda L) = \lambda Q(K, L) \quad \text{voor alle } K, L > 0.$$

In deze situatie zal de productie-output dus met dezelfde factor schalen als de factor waarmee de productiefactoren (dus de input) geschaald werden.

[6] Schrijf zelf de functie f op zo dat $h = g \circ f$.

Dat is niet altijd realistisch. Men kan zich indenken dat in een groot bedrijf een verdubbeling van de ingezette middelen niet helemaal zal omgezet worden in een verdubbeling van de output. Het bedrijf wordt immers door een schaalvergroting ook logger: er zullen relatief meer middelen moeten gaan naar management en administratie. Dergelijke situatie kunnen we modelleren door te eisen dat de productiefunctie Q voldoet aan

$$Q(\lambda K, \lambda L) = \lambda^r Q(K, L) \quad \text{voor alle } K, L > 0 \text{ en alle } \lambda > 0 \text{ met } 0 < r < 1.$$

Voor een klein bedrijf daarentegen is het aannemelijker dat een verdubbeling van de ingezette productiefactoren aanleiding kan geven tot meer dan een verdubbeling van de productie-output. Een aantal productiemiddelen, die toch reeds in het bedrijf aanwezig waren (machines, secretariaat, ...) en nog niet op maximale capaciteit konden gebruikt worden, kunnen immers bij een schaalvergroting efficiënter benut worden. Deze situatie kunnen we modelleren door te eisen dat de productiefunctie Q voldoet aan

$$Q(\lambda K, \lambda L) = \lambda^r Q(K, L) \quad \text{voor alle } K, L > 0 \text{ en alle } \lambda > 0 \text{ met } r > 1.$$

Dit alles motiveert volgende definitie.

3.3.2 Definitie

Een functie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ noemt men ***homogeen van graad*** *r (met $r \in \mathbb{R}$) als voor alle $(x_1, \ldots, x_n) \in A$ en voor alle $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ geldt dat $(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \in A$ en dat*

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^r f(x_1, \ldots, x_n).$$

3.3.3 Voorbeelden

(1) Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een lineaire functie, dan is f homogeen van graad 1. Inderdaad, als f lineair is, bestaan er $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ zo dat voor alle $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ geldt dat

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n.$$

De homogeniteit volgt hieruit onmiddellijk.

(2) De functie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ is homogeen van graad 1. Inderdaad, voor alle $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ en alle $x, y \in \mathbb{R}$ is

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = \sqrt{\lambda^2 (x^2 + y^2)} \\ &= \lambda \sqrt{x^2 + y^2} = \lambda f(x, y). \end{aligned}$$

(3) De functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto x^2 + xy + z^2 + 3yz$ is homogeen van graad 2.

(4) De functie

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{als } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{als } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

is homogeen van graad 0.

(5) De functie

$$Q : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : (K, L) \mapsto a\, K^\alpha L^\beta$$

met $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+$ is homogeen van graad $\alpha + \beta$. Inderdaad, voor alle $\lambda > 0$ en $K, L \geq 0$ is

$$Q(\lambda K, \lambda L) = a(\lambda K)^\alpha (\lambda L)^\beta = a\lambda^{\alpha+\beta} K^\alpha L^\beta = \lambda^{\alpha+\beta} Q(K, L).$$

Deze functie wordt dikwijls als model voor een productiefunctie gebruikt. Men noemt ze de **Cobb-Douglasproductiefunctie**.

(6) De functie

$$Q : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : (K, L) \mapsto a\left[bK^\alpha + (1-b)L^\alpha\right]^{1/\alpha}$$

met $a, b, \alpha \in \mathbb{R}_0^+$ is homogeen van graad 1. Inderdaad, voor alle $\lambda > 0$ en $K, L \geq 0$ is

$$\begin{aligned} Q(\lambda K, \lambda L) &= a\left[b(\lambda K)^\alpha + (1-b)(\lambda L)^\alpha\right]^{1/\alpha} \\ &= a\left[\lambda^\alpha (bK^\alpha + (1-b)L^\alpha)\right]^{1/\alpha} = \lambda Q(K, L). \end{aligned}$$

3.3.4 Stelling van Euler

Zij $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een functie op een open deel $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Veronderstel dat f homogeen is van graad $r \in \mathbb{R}$ en dat f continue partiële afgeleiden heeft in A. Dan is voor alle $(x_1, \ldots, x_n) \in A$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, D_i f(x_1, \ldots, x_n) \;=\; r\, f(x_1, \ldots, x_n).$$

Bewijs: Kies een willekeurige $(x_1, \ldots, x_n) \in A$ en beschouw de functie

$$F : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : \lambda \mapsto F(\lambda) = f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Omdat f homogeen is van graad r, geldt dat $F(\lambda) = \lambda^r f(x_1, \ldots, x_n)$. Bijgevolg is $F'(\lambda) = r\lambda^{r-1} f(x_1, \ldots, x_n)$ en dus is $F'(1) = r f(x_1, \ldots, x_n)$.

We kunnen de afgeleide F' ook anders berekenen door F op te vatten als een samenstelling en de kettingregel te gebruiken. Beschouw

$$h : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^n : \lambda \mapsto (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Dan is $F = f \circ h$. Uit Stelling 3.2.1 volgt dat

$$F'(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} D_i f\big(h(\lambda)\big) h_i'(\lambda).$$

Hierin is h_i de i-de componentsfunctie van h, dus $h_i : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : \lambda \mapsto \lambda x_i$. Duidelijk is $h_i'(\lambda) = x_i$. Bijgevolg is

$$F'(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} D_i f\big(h(\lambda)\big) x_i$$

en vermits $h(1) = (x_1, \ldots, x_n)$, is

$$F'(1) = \sum_{i=1}^{n} x_i D_i f(x_1, \ldots, x_n).$$

Wanneer we dit vergelijken met de vorige uitdrukking voor $F'(1)$, vinden we het resultaat van de stelling. ■

3.3.5 Voorbeeld

Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 2x^2 + xy$. Om de stelling van Euler toe te passen, bekijken we eerst of de functie homogeen is, en bepalen we de graad van homogeniteit:

$$f(\lambda x, \lambda y) = 2\lambda^2 x^2 + \lambda x \lambda y = \lambda^2 f(x, y).$$

De functie is homogeen van graad 2. De stelling van Euler geeft dan het volgende verband:

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) \cdot x \quad &+ \quad D_2 f(x, y) \cdot y \quad &= 2f(x, y) \\ (4x + y) \cdot x \quad &+ \quad x \cdot y \quad &= 4x^2 + 2xy = 2f(x, y). \end{aligned}$$

3.3.6 Economische interpretatie van de stelling van Euler

Beschouw een productiefunctie

$$Q : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : (K, L) \mapsto Q(K, L)$$

met $Q(K, L)$ = de productie-output (gemeten in euro) bij inzet van kapitaal K en arbeid L (beide ook gemeten in euro).

Neem nu aan dat Q een homogene functie is van graad 1. De stelling van Euler leert ons dat in dat geval

$$Q(K, L) = K \frac{\partial Q}{\partial K}(K, L) + L \frac{\partial Q}{\partial L}(K, L).$$

Wanneer we dat herformuleren met de economische terminologie die we op blz. 114 hebben ingevoerd, vinden we dat

$$\begin{array}{ccccc} \text{totale} & & \text{kapitaal} \cdot & & \text{arbeid} \cdot \\ \text{productie-} & = & \text{marginale productiviteit} & + & \text{marginale productiviteit} \\ \text{output} & & \text{van kapitaal} & & \text{van arbeid.} \end{array}$$

Als voor elke productiefactor per eenheid een bedrag zou moeten betaald worden dat gelijk is aan de marginale productiviteit, dan geven de termen in het rechterlid de totale kost voor elk van die productiefactoren. De stelling van Euler leert ons dat de som van deze kosten voor beide productiefactoren gelijk is aan de totale output.

4. Richtingsafgeleiden en gradiënt

4.1. Richtingsafgeleide

De partiële afgeleiden geven de verandering in een punt in de richting van de x- of y-as weer. We willen echter ook in eender welke andere richting kunnen afleiden. Hiervoor bekijken we de richtingsafgeleide.

4.1.1 Definitie

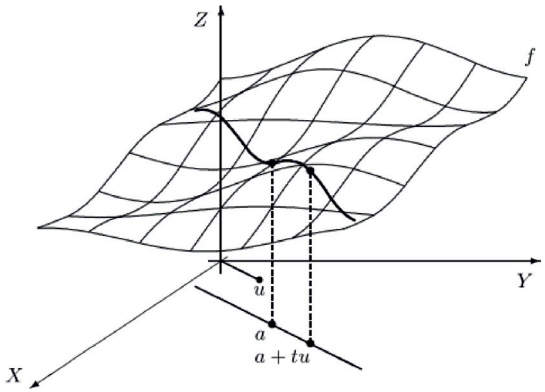
Beschouw een functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en een $a \in \mathbb{R}^n$. Voor een $u \in \mathbb{R}^n$ met $\|u\| = 1$ definiëren we een functie

$$g_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto g_u(t) = f(a + tu).$$

*We noemen f **afleidbaar** in a **volgens de richting** u als g_u afleidbaar is in 0. We definiëren en noteren dan de **richtingsafgeleide** van f in a volgens de richting u door*

$$D_u f(a) = g_u'(0).$$

Om visueel inzicht te krijgen in de notie van richtingsafgeleide helpt het de situatie met $n = 2$ te bekijken.



Merk ook op dat de partiële afgeleiden eigenlijk de richtingsafgeleiden zijn volgens de n richtingen bepaald door de standaardbasis van $\mathbb{R}^n$, dus

$$\begin{aligned} D_1 f(a) &= D_{(1,0,0,\ldots,0)} f(a) \\ D_2 f(a) &= D_{(0,1,0,\ldots,0)} f(a) \\ &\vdots \\ D_n f(a) &= D_{(0,0,0,\ldots,1)} f(a). \end{aligned}$$

4.1.2 Propositie

Beschouw een functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die partieel afleidbaar is in een open omgeving van een punt $a \in \mathbb{R}^n$. Veronderstel dat de partiële afgeleiden $D_1 f, \ldots D_n f$ continu zijn in a. Dan is f afleidbaar in a volgens elke richting $u \in \mathbb{R}^n$ met $\|u\| = 1$. Bovendien is

$$D_u f(a) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(a)\, u_i.$$

Bewijs: Dat resultaat is een gevolg van de kettingregel. Kies een $u \in \mathbb{R}^n$ met $\|u\| = 1$ en beschouw de functie

$$g_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f(a + tu) = f(a_1 + tu_1, \ldots, a_n + tu_n).$$

Merk op dat $g_u = f \circ h$ waarbij h de functie is gegeven door

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : t \mapsto a + tu = (a_1 + tu_1, \ldots, a_n + tu_n).$$

Men gaat gemakkelijk na dat de componentfuncties van h afleidbaar zijn in $t = 0$ en dat $h_i'(0) = u_i$ voor alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Uit de kettingregel volgt nu dat g_u

afleidbaar is in 0 en dat

$$g_u'(0) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(a)\, h_i'(0) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(a)\, u_i$$

■

Dat resultaat heeft geen omgekeerde. Er zijn functies die in een bepaald punt in alle richtingen afleidbaar zijn maar waarvoor de partiële afgeleiden enkel in a bestaan, of wel in een open omgeving van a bestaan maar niet continu zijn in a.

4.1.3 Voorbeeld

We berekenen de richtingsafgeleide in de richting $u(-3,4)$ in het punt $a(1,3)$ van de functie

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto 2\sqrt{x}y + xy^2.$$

- Ten eerste herschalen we de richting u zodat $\|u\| = 1$ met behulp van de stelling van Pythagoras. Initieel is $\|u\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$. Dus de genormeerde richtingsvector wordt dan $u^* = \left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.
- Vervolgens berekenen we de partiële afgeleiden in a:

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= \tfrac{y}{\sqrt{x}} + y^2 & D_1 f(1,3) &= 12, \\ D_2 f(x,y) &= 2\sqrt{x} + 2xy & D_2 f(1,3) &= 8. \end{aligned}$$

- Tot slot berekenen we deze concrete richtingsafgeleide met behulp van de formule uit Propositie 4.1.2:

$$D_u f(1,3) = 12 \cdot \frac{-3}{5} + 8 \cdot \frac{4}{5} = \frac{-4}{5}.$$

4.2. Gradiënt

Vervolgens draaien we de situatie om en gaan we op zoek naar de richting waarin een functie het sterkst toeneemt, oftewel naar de richting waarin de richtingsafgeleide het grootst is. Die richting noemt men de gradiënt van een functie in een bepaald punt.

4.2.1 Definitie

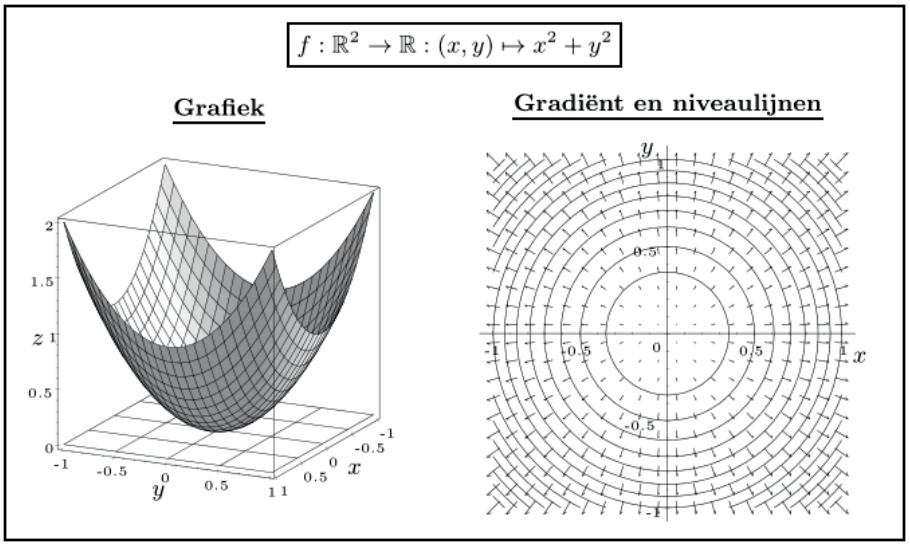
*Beschouw een functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die partieel afleidbaar is. Men definieert de **gradiënt** van f als de functie*

$$\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto \big(D_1 f(x), D_2 f(x), \ldots, D_n f(x)\big).$$

Opmerking: De gradiënt is een functie $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; met elk punt $x \in \mathbb{R}^n$ correspondeert dus een vector $\nabla f(x)$, opnieuw van $\mathbb{R}^n$. Daarom spreekt men van een **vectorveld**.

Wanneer bijvoorbeeld $n = 2$ (of eventueel $n = 3$) kan men het vectorveld ∇f grafisch voorstellen. Aan elk punt (x, y) van het vlak $\mathbb{R}^2$ "hecht" men een vector $\nabla f(x, y)$, die men tekent door in het punt (x, y) een pijltje te tekenen in de richting van $\nabla f(x, y)$ en met een lengte gelijk aan (of evenredig met) $\|\nabla f(x, y)\|$. Natuurlijk kan men in de praktijk niet in *elk* punt (x, y) van het vlak effectief zo'n pijltje gaan tekenen; er zijn immers oneindig veel punten en bovendien zou de tekening letterlijk zwart zien van de pijltjes. Men zal daarom slechts voor een beperkt aantal punten die pijltjes tekenen (bv. voor punten die gelegen zijn op een regelmatig "rooster" in het vlak). Op die manier kan men wel een aanschouwelijke voorstelling van het vectorveld ∇f verkrijgen.

We illustreren dat hieronder voor de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Men rekent gemakkelijk uit dat hier $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$.



We hebben in bovenstaande tekening bovenop het gradiëntvectorveld ∇f ook de niveaulijnen van f getekend (op niveau = 1/8, 2/8, 3/8, 4/8, ...). We zien dat de gradiënt loodrecht blijkt te staan op de niveaulijnen en wijst in de richting van toenemende functiewaarden. Naarmate die toename groter is, dus naarmate de niveaulijnen dichter bij elkaar komen te liggen, blijkt de norm van de gradiënt groter te worden. We zullen dadelijk kunnen begrijpen dat dit een algemeen fenomeen is althans voor "brave" functies, d.w.z. functies die continue partiële afgeleiden hebben.

4.2.2 Voorbeeld

We beschouwen opnieuw de functie

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 2\sqrt{x}y + xy^2.$$

De gradiënt van f in $a = (1, 3)$ wordt gegeven door

$$\nabla f(1, 3) = (D_1 f(1, 3), D_2 f(1, 3)) = (12, 8).$$

Dat is de richting van de grootste toename in a. Bereken nu zelf de richtingsafgeleide in deze richting. Verwacht je dat deze groter of kleiner is dan de richtingsafgeleide die je in voorbeeld 4.1.3 berekende?

4.3. Betekenis van de gradiënt

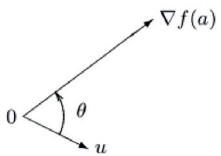
Beschouw een functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die partieel afleidbaar is in een open omgeving van een punt $a \in \mathbb{R}^n$. Veronderstel dat de partiële afgeleiden $D_1 f, \ldots, D_n f$ continu zijn in a. Uit Propositie 4.1.2 weten we dat voor elke richting $u \in \mathbb{R}^n$ (met $\|u\| = 1$):

$$\begin{aligned} D_u f(a) &= D_1 f(a) u_1 + D_2 f(a) u_2 + \cdots + D_n f(a) u_n \\ &= \langle \nabla f(a), u \rangle \end{aligned}$$

We weten nu dat

$$\langle \nabla f(a), u \rangle = \|\nabla f(a)\| \cos\theta$$

waarbij θ de hoek is tussen u en $\nabla f(a)$.



Indien dus $\theta = 0$, m.a.w. indien u de richting van $\nabla f(a)$ is, dan is $D_u f(a)$ maximaal, nl. $D_u f(a) = \|\nabla f(a)\|$. De richting van $\nabla f(a)$ wijst dus aan in welke richting f het sterkst toeneemt; $\|\nabla f(a)\|$ beschrijft dan hoe groot die sterkste toename is. $\nabla f(a)$ zal dus (in het geval $n = 2$) loodrecht staan op de niveaulijnen van f en wijzen in de richting van toenemende functiewaarden.

5. Partiële afgeleiden van hogere orde

5.1. Definitie en eigenschappen

5.1.1 Definitie

Veronderstel dat $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ partieel afleidbaar is op een open verzameling A en dat de partieel afgeleide functies $D_j f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zelf ook partieel afleidbaar zijn. Dan zegt men dat f partieel afleidbaar is op A tot de ***tweede orde*** *en men noteert*

$$D_i(D_j f) = D^2_{ij} f.$$

Analoog kan men partiële afgeleiden van nog hogere orde definiëren.

Opmerking: Een alternatieve notatie voor de partiële afgeleiden van tweede orde is

$$D^2_{ij} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Als $i = j$, dus als men twee maal na elkaar naar de i-de variabele afleidt, noteert men ook

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Voor partiële afgeleiden van hogere orde spreken de notaties voor zich. Zo staat bijvoorbeeld $D^3_{ijk} f$ voor de partiële afgeleide van f voor de partiële afgeleide van de derde orde van f, eerst naar haar k-de, dan naar haar j-de en tenslotte naar haar i-de veranderlijke. Of in de alternatieve schrijfwijze:

$$D^3_{ijk} f = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}.$$

Indien bijvoorbeeld $i = j$ resp. $i = j = k$, zal men bovenstaande notatie meestal "vereenvoudigen" tot

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_k} \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}.$$

5.1.2 Voorbeeld

Beschouw de functie

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto e^{x^2 y}.$$

Dan is

$$
\begin{aligned}
D_1 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) &\mapsto 2xy\, e^{x^2 y} \\
D_2 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) &\mapsto x^2\, e^{x^2 y} \\
D^2_{11} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) &\mapsto 2y\, e^{x^2 y} + 4x^2 y^2\, e^{x^2 y} \\
D^2_{22} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) &\mapsto x^4\, e^{x^2 y} \\
D^2_{12} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) &\mapsto 2x\, e^{x^2 y} + 2x^3 y\, e^{x^2 y} \\
D^2_{21} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) &\mapsto 2x\, e^{x^2 y} + 2x^3 y\, e^{x^2 y}.
\end{aligned}
$$

We merken op dat in dit voorbeeld $D^2_{21} f = D^2_{12} f$. Dit fenomeen blijkt onder milde voorwaarden op f algemeen te zijn, zoals volgende stelling ons leert.

5.1.3 Stelling

Beschouw een functie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gedefinieerd op een open verzameling A. Veronderstel dat f partiële afgeleiden tot de tweede orde toelaat en dat de functies $D^2_{ij} f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en $D^2_{ji} f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continu zijn, dan is $D^2_{ij} f = D^2_{ji} f$.

We gaan niet in op het bewijs van deze stelling.

6. Opdrachten

6.1. Partiële afgeleiden

1 Bereken de partiële afgeleiden naar alle veranderlijken van de volgende functies:

(a) $f_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \dfrac{x^2}{y} + e^{xy}$

(b) $f_2 : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \ln(xy)\sin(1/x)$

(c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (r, \theta) \mapsto r^2 e^{r\cos\theta}$

(d) $f_4 : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 \sin(x_2 + x_3) + \ln\left(\dfrac{x_1}{x_2 + x_3}\right)$

(e) $f_5 : \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy + 2x^3 + \dfrac{1}{x^2 y}$

(f) $f_6 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto z^2 \cos x \sin y + \ln(y/z) + e^{x^3 \sin(xz)}$.

(g) $f_7 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (u, v, w) \mapsto u\sin(2v - w) + vw\sqrt{1 + u^2 + 2v^2 + 3}^2$

2 Beschouw

$$p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (y_1, y_2, y_3) \mapsto 9\frac{y_1 y_2 y_3}{y_1 + y_2 + y_3}.$$

Bereken $D_3 p(1, -2, 4)$.

6.2. Eersteordebenadering

3 Bereken met behulp van Stelling 2.1.3 de eersteordebenadering van volgende functies $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$ rond $a \in \mathbb{R}^2$.

(a) $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 3xy \qquad a = (1, 1)$.

(b) $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) \qquad a = (1, 0)$.

(c) $f(x, y) = x^3 y + 4x^2 y^2 - xy^3 \qquad a = (-1, 2)$.

(d) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} \qquad a = (0, 0)$.

4 Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto 2x - 3y + z + 5$.

(a) Argumenteer dat f een eersteordebenadering g heeft rond elk punt $a \in \mathbb{R}^3$.

(b) Hangt het voorschrift van die eersteordebenadering af van a? Vind je dat vreemd of kon je dat eigenlijk verwachten?

5 Geef de vergelijking voor de grafiek van het raakvlak aan

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 9 - x^2 - y^2$$

in het punt $(1, 2, f(1, 2))$.

6 Argumenteer met behulp van Stelling 2.1.3 dat

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto 4\sin(x(y+z)) - yz$$

een eersteordebenadering heeft rond het punt $(0, 1, 2)$ en bereken ze.

7 Je moet het volume V van een balkvormige kast meten. Je doet dit door de hoogte h, de breedte b en de diepte d te meten. Hoe nauwkeurig (in procent) moet je afmetingen kunnen opmeten als je zeker wil zijn dat het berekende volume niet meer dan 2% van de werkelijke waarde afwijkt?

8 Je moet de oppervlakte van een driehoek meten. Daarvoor meet je de lengten van twee zijden a en b en de ingesloten hoek θ. De oppervlakte wordt dan gegeven door $\frac{1}{2}ab\sin\theta$. Je vindt $a = 10$ cm, $b = 20$ cm en $\theta = 30°$. Je weet dat je lengtemetingen nauwkeurig zijn tot op 1 mm na; de fout op de meting van de hoek is beperkt tot $1°$. Schat wat de maximale fout is die door de meetfouten op de berekende waarde van de oppervlakte kan zitten.

9 Hagar de verschrikkelijke onderneemt een aanval op het kasteel van Atilla de Hun. Met een katapult wil hij een gat maken in de kasteelmuren. Het kasteel ligt echter verscholen achter een heuvel. Gelukkig is Hagars katapult zo ontworpen dat de hoek θ (uitgedrukt in radialen) tussen de horizontale en de baan van het projectiel en de snelheid v waarmee een projectiel wordt weggeschoten regelbaar zijn. De afstand $S(v, \theta)$ die het projectiel horizontaal gezien overbrugt is dan

$$S(v, \theta) = \frac{1}{g}v^2 \sin 2\theta.$$

Hierbij is g een constante die de valversnelling wordt genoemd. Bij een eerste poging wordt een steen gekatapulteerd onder een hoek van $30°$. Het projectiel geraakt echter niet over de heuveltop; maar Hagar is er zeker van dat de steen zijn doel getroffen zou hebben, als die heuvel niet in de weg stond. Daarom besluit hij de hoek met $1°$ te verhogen en de katapult niet te verplaatsen. Met hoeveel procent moet hij dan – ter compensatie – de katapulteersnelheid aanpassen? Maak een eersteordebenadering.

10 De productiefunctie $Q : (\mathbb{R}_0^+)^2 \to \mathbb{R}$ van een bedrijf is gegeven door

$$Q(K, L) = 2K^{1/3}L^{2/3} + K^{2/3}L^{1/3}$$

waarbij K het ingezette kapitaal en L de ingezette arbeid is (beide uitgedrukt in een of andere geschikte eenheid). Veronderstel dat de arbeidseenheden 8 keer meer zijn dan de kapitaalseenheden. Het bedrijf haalt hiermee een zekere productieoutput die het ook in de toekomst wil blijven handhaven.
Met hoeveel procent moet dan de inzet van arbeidseenheden (ongeveer) opgetrokken worden als een daling van 1% van de kapitaalseenheden moet gecompenseerd worden?

11 Het lichaamsgewicht van een persoon hangt af van de dagelijkse inname C van calorieën via het eten en van het dagelijkse energieverbruik E (door lichaamsbeweging en dergelijke). Uit observaties blijkt dat een stijging van C met 5% en een gelijktijdige stijging van E met 4% geen effect hebben op het lichaamsgewicht. Anderzijds laat een stijging van C met 2% gecombineerd met een daling van E met 3% het lichaamsgewicht met 4% toenemen.
Als je 5% wilt vermageren door enkel meer te sporten en je eetpatroon niet te veranderen, met hoeveel procent moet jouw energieverbruik E dan (ongeveer) toenemen? Gebruik de eersteordebenadering.

6.3. Kettingregel

12 Beschouw de functie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met continue partiële afgeleiden van de eerste orde. Definieer

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto g(\sin t, cos(3t) + t).$$

(a) Bereken $h'(t)$.

(b) Stel dat $D_1 g(0,1) = -\frac{\pi}{2}$ en $D_2 g(0,1) = \pi$. Bereken $h'(0)$.

13 Bereken $(f \circ g)'$ met behulp van de kettingregel als

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^3 + y^2 \quad \text{en} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos t, \sin t).$$

Vergewis je ervan dat dit hetzelfde oplevert als wat je krijgt als je eerst het functievoorschrift van $(f \circ g)$ uitrekent en dan de afgeleide berekent.

14 Beschouw een overal afleidbare functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : u \mapsto g(u)$ en de functie

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 y + 3y^2.$$

Bereken $D_1(g \circ f)$ en $D_2(g \circ f)$ met behulp van de kettingregel.

15 Beschouw de functie $r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ met continue partiële afgeleiden van de eerste orde. Definieer

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto r(x^2 y, x + 3y, x e^{2y}).$$

Bereken de partiële afgeleiden van f.

16 Beschouw de functie

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (u^2 + uv, e^v, \sin(u - v)).$$

en een functie $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ met continue partiële afgeleiden van de eerste orde. Bereken $D_1(g \circ f)$ en $D_2(g \circ f)$ in termen van $D_1 g$, $D_2 g$ en $D_3 g$.

17 Veronderstel dat de functie

$$Q : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : (K, L) \mapsto Q(K, L)$$

de productie-output van een bedrijf beschrijft als functie van de ingezette middelen aan kapitaal en arbeid. Veronderstel dat de middelen die het bedrijf kan inzetten, afhangen van de tijd. Die tijdsafhankelijkheid beschrijven we met een functie

$$M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : t \mapsto M(t) = (K(t), L(t)).$$

Noteer met q de functie die beschrijft hoe de output van het bedrijf afhangt van de tijd. Dan is $q = Q \circ M$, met andere woorden:

$$q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : t \mapsto Q(K(t), L(t)).$$

(a) Veronderstel dat Q een Cobb-Douglasproductiefunctie is met voorschrift $Q(K, L) = 7K^{3/4}L^{1/4}$. We nemen aan dat de beschikbare hoeveelheid kapitaal en arbeid evolueren als volgt: $K(t) = 100 + t$ en $L(t) = 256/(1+2t)$. Bereken $q'(4)$ en interpreteer je antwoord.

(b) Geef een uitdrukking voor $q'(t)$ in het speciaal geval waarbij l constant is, dus waarbij $l(t) = L_0$ en waarbij we geen voorschrift hebben voor $Q(K, L)$ maar we wel aannemen dat Q partieel afleidbaar is.

18 Beschouw een functie f die overal afleidbaar is

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : u \mapsto (f_1(u), f_2(u), f_3(u)),$$

en de, overal partieel afleidbare, functie $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

(a) Bereken $(g \circ f)'$ in termen van f_1', f_2' en f_3' en de partiële afgeleiden van g.

(b) Stel dat we nu g kennen als

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto xyz^2 + e^{yz}.$$

Gebruik je berekeningen in (a) om $(g \circ f)'$ in termen van f_1', f_2' en f_3' te berekenen.

19 Beschouw afleidbare functies $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en definieer de functie f als volgt:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto (f_1(t), f_2(t), t \cos t).$$

Veronderstel dat we bovendien een functie $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ hebben met continue partiële afgeleiden van de eerste orde. Definieer nu de functie g als volgt:

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto y^2 + h(x, z)e^z.$$

Bereken $(g \circ f)'$.

20 Een Leuvens biotechnologiebedrijf produceert twee medicijnen, X en Y. De kostfunctie wordt gegeven door

$$K : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ : (x, y) \mapsto K(x, y)$$

waarbij $K(x, y)$ staat voor de dagelijkse productiekost (in duizenden euro) als er dagelijks x eenheden van medicijn X worden geproduceerd, en y eenheden van medicijn Y. Veronderstel dat K overal partieel afleidbaar is en dat de partiële afgeleide functies gegeven worden door

$$D_1K(x, y) = e^x + \frac{1 + xy + x^2}{x + y} \qquad D_2K(x, y) = \frac{2x + 3y}{y^2 + xy}$$

Bereken de afgeleide functie van $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : y \mapsto K(20, y)$?

21 Zij $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ een functie gedefinieerd op een open gebied A van $\mathbb{R}^2$ dat $(2, 1)$ bevat, met continue partiële afgeleiden. Veronderstel dat $f(2, 1) = 4$ en dat voor alle $(x, y) \in A$ geldt dat

$$x^3 f(x, y)^2 = 18.$$

Bereken $D_1 f(2, 1)$.

22 Beschouw een functie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met continue partiële afgeleiden. Veronderstel dat $g(3, -1) = 0$, $D_1 g(3, -1) = 2$ en $D_2 g(3, -1) = -5$. Veronderstel bovendien dat er een open interval A bestaat dat 3 bevat en dat er een afleidbare functie $\varphi : A \to \mathbb{R}$ bestaat zo dat $\varphi(3) = -1$ en zo dat $g(x, \varphi(x)) = 0$ voor alle $x \in A$. Bereken $\varphi'(3)$.

23 Ga na welke van de volgende functies homogeen zijn. Controleer voor die functies de stelling van Euler.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 y^3 + (x + y) y^4$

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto \dfrac{y^2 z + xyz}{x} + x^3$

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 y \ln \dfrac{2x}{3y}$

(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (r, \theta) \mapsto r^2 \sin \dfrac{r}{3\theta} + \theta r.$

24 Beschouw een markt met 2 goederen. De vraag q_1 naar product 1 wordt bepaald door de prijzen p_1 en p_2 en het inkomen y op de volgende manier:

$$q_1(p_1, p_2, y) = \frac{10y}{p_1 + 5p_2}$$

Is deze vraagfunctie homogeen? Van welke graad? Interpreteer dit!

25 Beschouw de Cobb-Douglasproductiefunctie $Q(K,L) = \frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$.

(a) Is deze functie homogeen? Van welke graad?

(b) Toon aan dat inderdaad geldt: totale productieoutput = kapitaal · marginale productiviteit kapitaal + arbeid · marginale productiviteit arbeid.

26 Beschouw de productiefunctie $Q(K,L)$ waarvoor geldt dat voor alle $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$

$$Q(\lambda K, \lambda L) = \sqrt{\lambda}Q(K,L).$$

Waar of niet waar?

1. Als we de inputfactoren verviervoudigen van waarde, dan is de output in waarde verdubbeld.
2. Er is sprake van toenemende meeropbrengsten bij schaalvergroting.

27 Bepaal getallen a en b zo dat de productiefunctie $Q(K,L) = K^aL^b + K^{2b}L^{1/3}$ de eigenschap heeft van constante meeropbrengsten bij schaalvergroting.

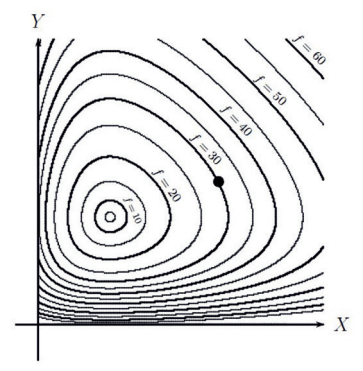
6.4. Richtingsafgeleide en gradiënt

28 Bereken de richtingsafgeleide van de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto xy - x^3 + y^2$ in het punt $(1,0)$ volgens de richting $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

29 Bereken de richtingsafgeleide van de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto f(x,y) = 3x^2 - 2y^2$ in het punt p volgens de richting van $p(-1,3)$ naar $q(1,-2)$.

30 Bereken de richtingsafgeleide van de functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto 3xy + z^2$ in het punt $(1,-2,2)$ volgens de richting van dat punt naar de oorsprong.

31 Hiernaast zie je enkele niveaulijnen getekend van een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Voor een aantal niveaulijnen staat de bijbehorende functiewaarde expliciet vermeld. De zwarte stip op de figuur is het punt met coördinaat (x_0, y_0).



(a) Teken, vanuit het punt (x_0, y_0), een vector die dezelfde richting én zin heeft als $\nabla f(x_0, y_0)$.

(b) Wat kan je zeggen over het teken van $D_1 f(x_0, y_0)$? En over het teken van $D_2 f(x_0, y_0)$?

32 Zij f de functie met functievoorschrift

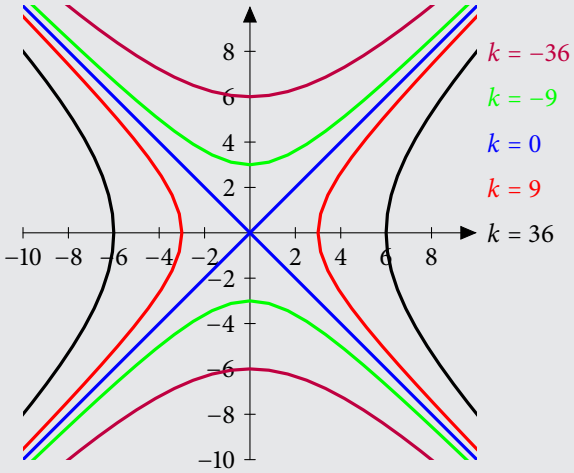
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto xy.$$

(a) Duid op een tekening de niveaulijnen aan van de functie f die horen bij de functiewaarden $-1, 0, 1$.

(b) Schets op eenzelfde tekening de gradiënt van de functie $f(x, y)$ zonder ∇f te berekenen.

(c) Bereken vervolgens $\nabla f(x, y)$ en teken voor enkele punten op de niveaulijnen de vector $\nabla f(x, y)$ met beginpunt (x, y).

33 Hiernaast zijn enkele niveaulijnen getekend van de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$. Bereken ∇f en teken voor enkele punten op de niveaulijnen de vector $\nabla f(x, y)$ met beginpunt (x, y). Wat stel je vast?



34 Beschouw volgende functie

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto e^x \sin x + e^{-x} \cos y.$$

Bepaal voor het punt $(0, \pi/2)$ de richting waarin de waarde van f het meeste toeneemt. Bepaal ook de mate van deze grootste toename.

35 Een berg heeft de vorm van de grafiek van volgende functie

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) = 1000 - 0.4\,x^2 - 0.3\,y^2.$$

Op positie $(20, 30, f(20, 30) = 570)$ bevindt zich een skiër die een afdaling wil doen. In welke richting zal hij skiën?

36 Vind de richting waarvoor de richtingsafgeleide van $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 4x - xy + 2y^2$ in het punt $(-2, 3)$ maximaal is. Bereken ook deze richtingsafgeleide.

37 Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een functie met continue partiële afgeleiden. Veronderstel dat de richtingsafgeleide van f in a volgens de richting bepaald door de vector $u = (1, 2)$ gelijk is aan $\sqrt{5}$ en volgens de richting bepaald door de vector $w = (0, -2)$ is hij -3. Bepaal de richtingsafgeleide van f in a volgens de richting bepaald door de vector $v = (-3, 1)$.

38 Zij $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ een functie met continue partiële afgeleiden. Definieer

$$r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(\sin(xy), e^{y-1}, x^2 - (\pi y)^2).$$

(a) Bereken $D_1 r$ in termen van de partiële afgeleiden van f.

(b) Veronderstel dat de richtingsafgeleide van f in het punt $(0, 1, 0)$ in de richting bepaald door $u = (0, 1, 0)$ gelijk is aan 4, in de richting bepaald door $v = (1, -1, 1)$ gelijk is aan $2\sqrt{3}$ en in de richting bepaald door $w = (1, 0, -1)$ gelijk is aan $-\sqrt{2}$. Bereken dan $D_1 r(\pi, 1)$.

39 Beschouw een productiefunctie

$$Q : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : (K, L) \mapsto Q(K, L)$$

met continue partiële afgeleiden. Deze functie beschrijft de productie-output van een bedrijf in functie van de ingezette middelen aan kapitaal en arbeid. Definieer nu een functie

$$u : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : (K, L) \mapsto Q\left(2, \frac{L}{K}\right).$$

Bereken de eerste ordebenadering van u rond het punt $(4, 16)$ als je weet dat $\nabla Q(2, 4) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ en $Q(2, 4) = \frac{3}{2}$.

6.5. Partiële afgeleiden van hogere orde

40 Waar of vals? Er bestaat een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$ waarvoor geldt dat:

$$D_1 f(x, y) = y \qquad \text{en} \qquad D_2 f(x, y) = x^2.$$

41 Bereken alle partiële afgeleiden van tweede orde van volgende functies en illustreer daarmee de geldigheid van Stelling 5.1.3.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (s, t) \mapsto s\, e^{s^2+t^2} - 3\sin(st)$.

(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto xy \ln(1 + z^2) + xy^5 + \sin x^2 - yz$.

42 Beschouw een productiefunctie

$$Q : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : (K, L) \mapsto Q(K, L)$$

met continue partiële afgeleiden. Deze functie beschrijft de productie-output van een bedrijf in functie van de ingezette middelen aan kapitaal en arbeid.

1. Wat verwacht je op basis van economische argumenten over het teken van $D^2_{12}Q(K,L)$
2. Neem nu aan dat Q een homogene functie is van graad 1 en dat $D^2_{11}Q(K,L) \leq 0$. Bewijs dat $D^2_{21}Q(K,L) \geq 0$.

43 Veronderstel dat $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ een functie is die continue partiële afgeleiden heeft van minstens tot de tweede orde. Beschouw nu de functie

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto g(x,y) = f(x^2y, x+y, x\,e^{3y}).$$

Argumenteer dat g continue partiële afgeleiden heeft van minstens tot de tweede orde. Bereken ook de tweede orde partiële afgeleiden van g in termen van de partiële afgeleiden van f.

44 Veronderstel dat $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ een functie is die continue partiële afgeleiden heeft van minstens tot de tweede orde. Beschouw nu de functie

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (u,v) \mapsto g(u,v) = f(uv+1, \sin(u+3v), u^2).$$

Bereken $D_1g(u,v)$, $D_2g(u,v)$ en $D^2_{12}g(u,v)$ in termen van de partiële afgeleiden van f.

45 Beschouw de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x^5 - x^2, x)$ met $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een functie met continue partiële afgeleiden minstens tot de tweede orde en $f(0,1) = 1, D_1f(0,1) = 2$, $D_2f(0,1) = 1$, $D^2_{11}f(0,1) = 0$, $D^2_{12}f(0,1) = -1$ en $D^2_{22}f(0,1) = -2$.
Bereken de tweedeordebenadering van g rond 1.